**NUMEROS REALES**

**Esquema**

1).- Las relaciones de Orden de los Números Reales

* Conceptos
* Ejemplos
* Ejercicios
* Gráficos

2).- Propiedades de las Relaciones de Orden en los Reales

3).- Valor Absoluto en los Números Reales

4).- Ecuaciones con Valor Absoluto

5).- La Recta Real e Intervalos de Coordenadas de un Punto de la Recta Real

6).- Coordenadas de un Punto en la Recta Real

7).- Distancia entre 2 Puntos en la Recta Real

8).- Puntos Medios y Distancias entre Puntos

9).- Propiedades de la Distancia entre 2 Puntos

10).- Intervalos Reales

**1).- Las Relaciones de Orden en los Números Reales**

* **Definición:**

Al igual que en los conjuntos N, Z y Q, en los números reales R utilizaremos la recta numérica y los signos >, <, ≥, ≤ e = para establecer las relaciones de orden entre dos números dados. En estos conjuntos, los números situados a la derecha son mayores que los situados a la izquierda.

**Relaciones ≥, ≤ en R.**

Consideremos los números reales √3 y √2. Para compararlos hacemos aproximaciones racionales de las raíces.

√3 ≈ 1,732 y √2 ≈ 1,414

 1,732 > 1,414

√3 > √2

Al generalizar dos números reales **a** y **b**, decimos que **a** < **b** si **b** está mas a la derecha que **a** en la recta real.

Si **a** < **b**, entonces b – a > 0

Los intervalos en R se definen como los intervalos en Q.

Para expresar los intervalos abiertos es suficiente el signo < (menor qué), pero para expresar los intervalos cerrados, se necesita el signo ≤ (menor o igual qué)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Intervalo abierto (a,b) | Intervalo cerrado [a,b] | Intervalo abierto a la derecha [a,b)  | Intervalo abierto a la izquierda (a,b] |
|  ▫ ▫  a b |  ▪ ▪ a b |  ▪ ▫ a b |  ▫ ▪  a b |

**El intervalo abierto (a,b)** está formado por los números reales **X** comprendidos entre **a** y **b**, excluidos **a** y **b**. Se expresa por a < x < b.

**El intervalo cerrado [a,b]** está formado por los números reales **X** comprendidos entre **a** y **b**, incluidos **a** y **b**. Se expresa por a ≤ x ≤ b.

Análogamente, el intervalo [a,b) se expresa a ≤ x < b. y el intervalo (a,b] se expresa por a < x ≤ b.

De la recta numérica se puede deducir que:

* Cualquier numero positivo es mayor que cualquier numero negativo
* Cualquier numero negativo es mayor que menor que cualquier numero positivo.

**Orden en los números Reales**

Dados dos números reales a y b siempre se cumple uno de los siguientes casos:

* a > b
* a < b
* a = b

Para ordenar un conjunto de números reales, se comparan dichos números y se establecen las relaciones de orden (>, < o =) que existen entre ellos.

* **Ejemplos:**

Para ordenar √5 y 2√3. Se calcula su diferencia: √5 - 2√3 =2,24 – 2 . 1, 73 = 2,24 – 3,46 = -1,22 < 0. Como el resultado es negativo, significa que 2√3 > √5.

Un conjunto de números reales se puede ordenar en forma **decreciente** (mayor a menor), utilizando la relación >. Si aparecen números irracionales se deben aproximar.

Por ejemplo, para ordenar en forma decreciente los números 0,065; - 1,3; -5/3; 4,5; 0,06; 0,1; 8,32; √5/2, utilizando la relación > con aproximación a las centésimas.

Se escriben los números racionales y los irracionales en forma decimal, con aproximación a las centésimas, es decir, con dos cifras decimales:

-5/3= -1,67 √5/2= 1,12

Luego se ordenan los números de mayor a menor:

8,32 > 4,5 > 1,12 > 0,1 > 0,065 > 0,06 > -1,3 > -1,67

Entonces los números con los valores originales quedarían ordenados así:

8,32 > 4,5 > √5/2 > 0,1 > 0,065 > 0,06 > -1,3 > -5/3

Para ordenar en forma **creciente** (de menor a mayor) un conjunto de números reales, se utiliza el signo <. Si hay números que no están expresados en forma decimal, se escriben en forma decimal y luego se comparan y ordenan.

Por ejemplo, para ordenar en forma creciente los números 1/3; -1,3; -√3; 3,1; 2√2; 0,015, primero se escriben los números en forma decimal aproximados, por ejemplo, a las décimas: 1/3 = 0,3 -√3 = -1,7 2√2= 2,8

Luego se ordenan de menor a mayor:

11,7 < -1,3 < 0,015 < 0,3 < 2,8 < 3,1

Y se reemplazan los valores. Resulta: -√3 < -1,3 < 0,015 < 1/3 < 2√2 < 3,1

**2).- Propiedades de las Relaciones de Orden en los Reales**

Verifiquemos que la relación mayor o igual que es una relación de orden total, para ello, comprobaremos que se cumplen las propiedades reflexiva, antisimétrica, transitiva y dicotómica.

**Propiedad Reflexiva:**

Si a es un numero real, se cumple que a ≥ a; entonces se dice que la relación ≥ cumple la propiedad reflexiva.

Ejemplo: √5 ≥ √5 ya que √5 = √5

**Propiedad Transitiva:**

Si a, b y c pertenecen a los números reales, si a ≥ b y b ≥ c, luego la relación ≥ cumple la propiedad transitiva.

Ejemplo: √7 ≥ √3 y √3 ≥ √2 = √7 ≥ √2

**Propiedad Antisimétrica:**

Si a y b son números reales y a ≥ b, no es posible que se dé la relación b ≥ a. entonces decimos que la relación que cumple es la propiedad antisimétrica.

Ejemplo: √8 ≥ √6 = √6 ≥ √8

**Propiedad de Dicotomía:**

Si a y b son dos números reales, se cumple que a ≥ b ó b ≥ a. Luego la relación ≥ cumple con la propiedad de dicotomía.

**3).- Valor Absoluto en los Números Reales**

La distancia entre 0 y +a es igual a la distancia entre 0 y –a. Esta distancia se llama valor absoluto y se representa |a|

|a| se lee: valor absoluto de a.

 -a 0 +a

|+a| = valor absoluto de +a

|-a | = valor absoluto de – a

**Grafico de la función Valor Absoluto en R**

La grafica de la función valor absoluto se compone de dos rectas. Primero se representará la función valor absoluto para valores de x ≥ 0.

Si x ≥ 0 entonces f(x) = x. la grafica de esta función es una recta cuya ecuación es y = x

Para representar esta recta basta con representar dos puntos de ella, los cuales les aparecen en la siguiente tabla:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 |
| Y | 0 | 1 | 2 |

La grafica de esta recta estará situada en el primer cuadrante (x > 0, y > 0)

Si x < 0 entonces f(x) = - x. la grafica de esta función es una recta cuya ecuación es y = - x

Para representar esta recta basta con representar dos puntos de ella, los cuales aparecen en la siguiente tabla:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | -1 | -2 |
| y | 1 | 2 |

La grafica de esta recta estará ubicada en el segundo cuadrante x <0,y>0. luego la grafica de la función valor absoluto viene dada por la unión de las dos rectas.

**4).- Ecuaciones con Valor Absoluto**

A continuación se aplicarán las propiedades de la función valor absoluto para resolver ecuaciones de la forma: |ax+b|=c

Por ejemplo: observa como se resuelve la siguiente ecuación: |3x+2|=5.

De acuerdo con las propiedades de la función valor absoluto, de la ecuación |3x+2|=5 se originan dos ecuaciones:

* 3x+2=5

 3x= 3

 x=1

* 3x+2=-5

 3x=-7

 x=-7/3

La ecuación tiene dos soluciones. Si se sustituye cada solución en la ecuación original, se debe cumplir la igualdad.

* Para x=1

 |3x+2|=5

 |3 . 1+2|=5 |3 +2|=5

 |5|=5

* Para x=-7/3

 |3x+2|=5

 |3 . (-7/3)+2|=5 |-7+2|=5

 |-5|=5

*“En resumen, al resolver una ecuación de la forma |ax+b|=c, hallamos el valor de x en ax+b=c y en –(ax+b)=c donde a, b, c Є R.”*

 **5).- La Recta Real e Intervalos de Coordenadas de un Punto de la Recta Real**

La recta R sobre la cual representamos los números racionales e irracionales se llama **Recta Real.** Dado un punto P cualquiera en la recta, al numero real **a** lo llamamos coordenada o abcisa de P y lo denotamos por P(a), que se lee: punto de coordenada **a.**

**6).- Coordenadas de un Punto en la Recta Real**

A cada punto de una recta real se le coloca un único número real llamado coordenada o abscisa del punto y, recíprocamente, a cada punto de esa recta se le coloca un único número para que sea su coordenada. Si esta doble asignación se hace de manera que puntos distintos tengan coordenadas distintas y cada numero sea coordenada de algún punto, se ha obtenido una correspondencia biunívoca entre la recta y el conjunto de los números reales. Esta asignación se denomina **sistema de coordenadas en la recta**, y una recta con un sistema de coordenadas se llama **recta real.**

* Si se usa una letra mayúscula para denotar un punto de una recta se usará su correspondiente letra minúscula para denotar su coordenada, así A(a) se lee ”A de a” y denota que el numero real **a** es coordenada del punto **A.**
* Al numero real cero le corresponde el punto **o** y se llama punto de origen.
* Al numero real uno le corresponde el punto **u** y se llama punto de unidad.

**7).- Distancia entre 2 Puntos en la Recta Real**

En una recta real, dados los puntos A y B tales que sus coordenadas sean los números reales a y b, respectivamente, se tiene que la distancia entre esos puntos es la diferencia entre el numero mayor y el numero menor, o sea, el numero a - b o b – a, dependiendo de cual de los números sea mayor o menor.

*“Si R es un punto de abscisa a, y Q es un punto de abscisa b, la distancia entre R y Q es igual al valor absoluto de la diferencia de las abscisas o coordenadas d(R,Q) = |b-a|”*

**8).- Puntos Medios y Distancias entre Puntos**

La coordenada m del punto medio M del segmento de extremos A(a) y B(b) está dada mediante m=a+b/2. ¿Por qué?

Veamos, si M(m) es el punto medio, entonces d(AM) = d(MB), y se cumple que m – a = b – m. Al sumar a ambos miembros m+a se tiene que 2m=a+b, y al dividir entre 2 se obtiene que m=a+b/2.

Por ejemplo, sobre la recta real, ¿Cuál es la coordenada del punto medio M segmento AB tal que A(2) y B(10)?

Ya que M es el punto medio del segmento AB, su coordenada m debe ser la media aritmética, es decir, m=2+10/2=6.

**Ejemplos:**

* ¿Cuál es la distancia del punto A(-3) al origen de coordenadas?

La respuesta es 3 porque la distancia de un punto cualquiera de la recta real al origen de coordenadas es su coordenada carente de signo, es decir, el valor absoluto de su coordenada.

* Dados los puntos A(-3), B(6) y C(7). ¿Cuál de ellos está mas lejos del origen de coordenadas? ¿y cual está Mas cerca?

Un punto está mas lejos de otro si su distancia es mayor que la otra y está mas cerca si su distancia es menor. Se tiene en este caso que

d(OA)=|0-(-3)|=3, d(OB)= |0-6| y d(OC)= |0-7|=7. por ende, el punto C es el que esta mas cercano.

* Dados los puntos A(-3), B(0), C(4) y O(12), ¿Cuál de los tres puntos restantes está mas alejado del punto B? ¿y cual esta mas cercano a el?

Las distancias de los puntos a B son d(AB)=|0-(-3)|=3, d(BC)=|4-0|=4 y d(BP)= |12-0|=12. por lo tanto, el punto mas alejado es el punto Py el punto mas cercano es A.

**9).- Propiedades de la Distancia entre 2 Puntos**

**Distancia positiva:**

Calculemos la distancia d(A,B) dados los puntos A y B de la recta ℓ, de coordenadas 2 y 6 respectivamente.

La distancia (d) entre 2 y 6 es 4, independientemente de que se mida de derecha a izquierda o viceversa.

La distancia entre 2 puntos de una recta es siempre un numero positivo; es decir, d(A, B) ≥ 0.

**Distancia cero en puntos coincidentes:**

Al calcular la distancia entre los puntos R de coordenada 5 y Q de coordenada 5, observamos que la distancia es igual a Cero.

La distancia entre dos puntos es cero, si y solo si dichos puntos coinciden; es decir, d(Q, R)= 0 Q = R

**Desigualdad triangular:**

Dados los puntos P, Q, R pertenecientes a la recta r, cuando R es mayor que P y Q, siempre se cumplirá lo siguiente:

d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)

Cuando R está entre P y Q, siempre se cumplirá que:

d(P, R) < d(P, Q) + d(Q, R)

Dados tres puntos A, B, C sobre la recta real, se cumple que:

d(A, B) ≤ d(A, C) + d(C,B)

**10).- Intervalos Reales**

Los números que están ordenados en forma creciente o decreciente pueden agruparse en conjuntos. En el caso de los números reales se hace necesario crear subconjuntos que llamaremos **intervalos,** los cuales pueden agruparse de varias formas.

**Tipos de intervalos reales:**

* **Intervalo cerrado**

Dada la recta ℓ y dos números a y b en ella, el intervalo cerrado de extremos a y b está formado por todos los números reales que son mayores o iguales que a y menores que b, con a y b incluidos; lo denotamos asi: [a,b].

[a,b] = {x Є R ⁄ a ≤ x ≤ b}

* **Intervalo abierto**

Dada la recta ℓ y dos números a y b en ella, el intervalo abierto de extremos a,b está formado por todos los números reales que son mayores que a y menores que b, sin incluir ni a ni b, y lo denotamos así: (a,b)

(a,b) = {x Є R ⁄ a < x < b}

* **Intervalo semiabierto a la izquierda**

Dada la recta ℓ y los números a y b en ella, el intervalo semiabierto a la izquierda de extremos a,b está formado por todos los números reales mayores que y menores e iguales que b; es decir, excluye a a e incluye a b. este intervalo se denota (a,b]

(a,b] = {x Є R ⁄ a < x ≤ b}

* **Intervalo semiabierto a la derecha**

Dada la recta ℓ y los números a y b en ella, el intervalo a la derecha de extremos a,b esta formado por todos los números reales mayores o iguales que a y menores que b, es decir, incluye a a y excluye a b. este intervalo se denota [a,b).

[a,b) = {x Є R ⁄ a ≤ x < b}

* **Intervalo al infinito**

Dada la recta ℓ y el número a, consideremos el conjunto de los números reales mayores o iguales que a. Al representar en la recta observamos que todos los números reales a la derecha de a pertenecen a este intervalo, por ello no podemos representarlo mediante un segmento. Representamos mediante una semirrecta de origen a y extremo infinito. Este intervalo se denota [a + °°)

a)     [a , °°) = {x Є R ⁄ x ≥ a}

b)     (a , + °°) = {x Є R ⁄ x > a}

c)      (-°°, a) = {x Є R ⁄ x ≤ a}

d)     (-°°, a) = {x Є R ⁄ x < a}

### Los números naturales

Con los [**números naturales**](http://www.vitutor.com/di/n/a_1.html) contamos los elementos de un conjunto ([**número cardinal**](http://www.vitutor.net/1/a_c.html)). O bien expresamos la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto ([**ordinal**](http://www.vitutor.net/1/a_0.html)).

El conjunto de los **números naturales** está formado por:

**N= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...}**

La s**uma y el producto** de **dos números naturales es otro número natural**.

La **diferencia** de **dos números naturales** **no** **siempre es un número natural**, sólo ocurre cuando el minuendo es mayor que sustraendo.

5 − 3

3 − 5

El **cociente** de **dos números naturales** **no** **siempre es un número natural**, sólo ocurre cuando la división es exacta.

6 : 2

2 : 6

Podemos utilizar **potencias**, ya que es la forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales.

La **raíz** de **un número natural** **no** **siempre es un número natural**, sólo ocurre cuando la raíz es exacta.

### Los números enteros

Los **números enteros** son del tipo:

**= {...−5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ...}**

Nos permiten expresar: el dinero adeudado, la temperatura bajo cero, las profundidades con respecto al nivel del mar, etc.

La **suma**, la **diferencia** y el **producto** de **dos números enteros es otro número entero**.

El **cociente** de **dos números enteros no** **siempre es un número entero**, sólo ocurre cuando la división es exacta.

6 : 2

2 : 6

Podemos operar con **potencias**, pero el **exponente** tiene que ser un número **natural**.

La [**raíz**](http://www.vitutor.com/di/e/a_9.html#re) de un **número entero no siempre es un número entero**, sólo ocurre cuando la raíz es exacta o si se trata de una raíz de índice par con radicando positivo.


### Los números racionales

Se llama **número racional** a todo número que puede representarse como el **cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero**.

Los **números decimales** (decimal exacto, periódico puro y periódico mixto) son **números racionales**; pero los otros números decimales ilimitados no.

La **suma, la diferencia, el producto y el cociente** de **dos números racionales es otro número racional**.

Podemos operar con **potencias**, pero el **exponente** tiene que ser un número **entero**.

La **raíz** de **un número racional no siempre es un número racional**, sólo ocurre cuando la raíz es exacta y si el índice es par el radicando ha de ser positivo.


# Los números irracionales

Un **número** es **irracional** si posee **infinitas cifras decimales no periódicas**, por tanto **no se pueden expresar en forma de fracción**.

El **número irracional** más conocido es , que se define como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

 = 3.141592653589...

Otros **números irracionales** son:

El número **e** aparece en procesos de crecimiento, en la desintegración radiactiva, en la fórmula de la catenaria, que es la curva que podemos apreciar en los tendidos eléctricos.

**e** = 2.718281828459...

El **número áureo**, , utilizado por artistas de todas las épocas (Fidias, Leonardo da Vinci, Alberto Durero, Dalí,..) en las proporciones de sus obras.

El **conjunto formado** por los números **racionales** e **irracionales** es el conjunto de los***números reales***, se designa por .

Con los **números reales** podemos realizar **todas las operaciones, excepto la radicación de índice par y radicando negativo, y la división por cero.**

## La recta real

A todo **número real** le corresponde un punto de la recta y a **todo punto de la recta un número real**.


## Representación de los números reales

Los **números reales** pueden ser representados en la recta con tanta aproximación como queramos, pero hay casos en los que podemos representarlos de forma exacta.



Nombre: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ fecha: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Nombre: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Docente: Nelson Alberto Rojas Marentes.

Taller Nº 3

Clasifica los números:

**2**Representa en la recta:

**3** Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

**|x| < 1**                **|x| ≤ 1**         **|x| > 1**              **|x| ≥ 1**

**4**Calcula los valores de las siguientes potencias:

**5** Halla las sumas:

**6** Realiza las operaciones:

**7** Opera:

**8**Efectúa:

**9**Calcula:

**10** Racionalizar


## Números reales. Ejercicios

**1**Representa en la recta:

**2** Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

**|x −2| < 1**          **|x −2| ≤ 1**         **|x −2| > 1**         **|x −2| ≥ 1**

**3**Opera:

**4** Calcula:

**5** Racionalizar:

